

Préface

par Denis Monasse

Rédacteur en chef de la RMS

Lorsqu'en 2003, la RMS, qui était encore la Revue de Mathématiques Spéciales, a failli disparaître et que, grâce à l'acharnement d'André Warusfel, nous avons pu la faire renaître sous le nouveau nom de Revue des Mathématiques de l'enseignement Supérieur, l'idée est venue tout naturellement à certains d'entre nous de consacrer dans notre nouvelle revue une place, certes restreinte, mais significative, aux meilleurs élèves de l'enseignement secondaire en espérant développer chez eux le goût des belles mathématiques, loin de ces exercices et problèmes aseptisés et répétitifs qui sont le lot des futurs bacheliers.

C'est alors que Guy Alarcon et Yves Duval, professeurs de mathématiques au lycée Louis-le-Grand, se sont lancés dans cette tâche difficile de trouver des sujets accessibles aux élèves de Terminale S (et éventuellement de Première S) sans dépassement de programme, mais aussi inventifs et capables de stimuler l'imagination et la rigueur de ces adolescents qui découvrent les mathématiques. Selon moi, le contrat est magnifiquement rempli. Le lecteur déjà féru de mathématiques découvrira dans les pages suivantes des sujets certes classiques, mais présentés de façon à ne faire appel qu'à des notions élémentaires, sans sacrifier pour autant l'élégance des démonstrations.

Ce recueil correspond à une réelle attente du public, il suffit de constater le succès rencontré par les divers concours mathématiques (concours Kangourou, olympiades régionales ou concours général) ou les ventes de livres consacrés aux sujets des Olympiades internationales de mathématiques. Or ce public n'est pas facile à atteindre du fait de sa dispersion dans de nombreuses classes de Terminale de la France toute entière. Les professeurs de l'enseignement secondaire se trouvent tiraillés entre la nécessité de préparer la grande masse de leurs élèves au baccalauréat en traitant des exercices et des problèmes « pré-digérés » typiques de cet examen, et l'envie de faire découvrir aux meilleurs d'entre eux des énoncés originaux traitant de belles mathématiques.

La solution consistant à insérer une dizaine de pages dans une revue consacrée pour l'essentiel aux étudiants des classes préparatoires et de l'université (et en particulier les candidats au

CAPES et à l'agrégation) n'est qu'un pis-aller. Un élève de Terminale ne s'abonnera pas à la RMS dans l'unique but de lire et de travailler ces quelques pages. D'où la nécessité de regrouper périodiquement ces articles, ces énoncés et corrigés de problèmes et d'exercices dans un ouvrage exclusivement destiné aux élèves et aux professeurs de Première et de Terminale. C'est dans ce but qu'est née l'idée de ce recueil.

Cet ouvrage n'est pas destiné à préparer des élèves à la transition vers les classes préparatoires. Il ne s'agit pas d'un cahier de devoirs de vacances dont le but serait de jeter un pont entre les mathématiques de Terminale et celles de l'enseignement supérieur bâties sur l'expérimentation, l'imagination et la démonstration. Les sujets abordés pourront sembler difficiles et il sera normal que même un bon ou un très bon élève rencontre des difficultés pour résoudre entièrement certains d'entre eux. Il ne devra pas hésiter dans ce cas à consulter le corrigé et à essayer de comprendre la logique de la solution. Nul doute qu'il progressera et que les réponses aux exercices et aux problèmes lui sembleront de plus en plus naturelles. Il découvrira peu à peu la beauté de la construction logique, des démonstrations et de la rigueur.

Le public visé par Guy Alarcon et Yves Duval est donc celui de ces quelque milliers d'élèves de nos lycées qui désirent explorer les recoins d'une discipline dans laquelle l'esthétique joue un rôle primordial, et trouver, pour certains, des exercices et des problèmes qui les préparent de manière intelligente, mais aussi exigeante, au concours général ou aux Olympiades Régionales. Bien entendu, leurs professeurs de mathématiques y trouveront une mine de sujets destinés à ces mêmes élèves, qui ne figurent en général qu'à quelques exemplaires dans une classe de Terminale.

Je veux répéter mon admiration de professeur de classe préparatoire et de mathématicien devant cet ouvrage et la tâche accomplie par ses auteurs, Guy Alarcon et Yves Duval. Il me faut aussi remercier André Warusfel dont la contribution a été essentielle pour la renaissance de la RMS et pour l'existence de cette rubrique destinée aux élèves de Terminale, sans lui rien n'aurait été possible. J'adresse également tous mes remerciements à Johan Yebbou qui a accepté de nous faire profiter des énoncés et surtout des corrigés des Olympiades Internationales de Mathématiques, dont il est l'un des piliers depuis de nombreuses années ; nous espérons que ce livre contribuera dans une modeste mesure à faire progresser les candidats français à cette compétition et à ramener notre pays dans le peloton de tête des jeunes mathématiciens. Je tiens enfin à faire part de ma gratitude à l'équipe de RDE qui nous accorde depuis 1984 ce soutien sans faille qui a permis la continuation de la RMS et la parution de cet ouvrage.

Table des matières

| | |
|---|-----|
| Préface | 3 |
| Chapitre 1 | 5 |
| Questions proposées | 5 |
| Problème : Combinatoire et arithmétique | 5 |
| Corrigé succinct des questions proposées | 7 |
| Corrigé succinct du problème | 9 |
| Chapitre 2 | 16 |
| Questions proposées | 16 |
| Problème : points conjugués par rapport à un cercle, une sphère | 16 |
| Corrigé des questions proposées | 18 |
| Corrigé du problème | 21 |
| Chapitre 3 | 24 |
| Questions proposées | 24 |
| Problème : analyse | 24 |
| Corrigé des questions proposées | 25 |
| Corrigé du problème | 30 |
| Chapitre 4 | 32 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 32 |
| Problème : résultant de deux polynômes | 33 |
| Olympiades internationales de mathématiques | 36 |
| Corrigé des questions proposées | 37 |
| Solution du problème | 47 |
| Corrigé de l'épreuve d'entraînement aux OIM | 56 |
| Chapitre 5 | 61 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 61 |
| Problème : quelques aspects du théorème de Catalan | 62 |
| Olympiades internationales de mathématiques 2004 | 64 |
| Corrigé des questions proposées | 65 |
| Solution du problème | 68 |
| Solution des exercices d'olympiades 2004 | 73 |
| Chapitre 6 | 83 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 83 |
| Problème : calcul approché de π | 84 |
| Corrigé des questions proposées | 87 |
| Solution du problème | 90 |
| Chapitre 7 | 103 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 103 |
| Problème : polygones et polyèdres réguliers intègres | 104 |
| Corrigé des questions proposées | 108 |
| Solution du problème | 113 |
| Chapitre 8 | 126 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 126 |
| Problème : le dernier chiffre non nul de $100!$ | 127 |

| | |
|---|-----|
| Corrigé des questions proposées | 128 |
| Solution du problème | 132 |
| Chapitre 9 | 136 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 136 |
| Problème : étude d'une équation diophantienne cubique | 137 |
| Olympiades internationales de mathématiques 2005 | 139 |
| Corrigé des questions proposées | 140 |
| Solution du problème | 147 |
| Solution des exercices d'olympiades 2005 | 152 |
| Chapitre 10 | 166 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 166 |
| Problème : équation de Riccati et fonctions polynômes | 167 |
| Olympiades internationales de mathématiques 2006 | 169 |
| Corrigé des questions proposées | 169 |
| Solution du problème | 174 |
| Solution des exercices d'olympiades 2006 | 179 |
| Chapitre 11 | 181 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 181 |
| Problème : Configurations de points entiers cocycliques | 182 |
| Corrigé des questions proposées | 183 |
| Solution du problème | 186 |
| Chapitre 12 | 192 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 192 |
| Problème : marches aléatoires | 193 |
| Olympiades internationales de mathématiques 2006 | 195 |
| Corrigé des questions proposées | 197 |
| Solution du problème | 201 |
| Solution des exercices d'olympiades 2006 | 205 |
| Chapitre 13 | 220 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 220 |
| Problème : Quelques aperçus sur la répartition des nombres premiers | 221 |
| Corrigé des questions proposées | 223 |
| Solution du problème | 227 |
| Chapitre 14 | 231 |
| Partition d'un rectangle, un théorème d'intégralité | 231 |
| Questions proposées aux élèves de Terminale S | 232 |
| Problème : Fonctions caractérisées par des inégalités | 233 |
| Corrigé des questions proposées | 235 |
| Solution du problème | 237 |
| Chapitre 15 | 243 |
| Partition d'un rectangle à côtés de longueurs entières | 243 |
| Problème : Étude d'un algorithme | 246 |
| Solution du problème | 247 |
| Étude d'un système dynamique | 249 |