Préface

Depuis 129 ans la RMS, anciennement dénommée *Revue de Mathématiques Spéciales* mais qui depuis plusieurs années, a changé son nom (et ses objectifs) pour le titre plus général de *Revue de la Filière Mathématiques* publie articles et notes de cours, énoncés et corrigés de problèmes et d'exercices posés aux concours des grandes écoles scientifiques ainsi qu'une rubrique *Questions et Réponses*, une rubrique *Bibliographie* et une rubrique plus spécialement dédiée aux meilleurs élèves de Terminale S et à leurs enseignants.

Au fil du temps, la rubrique des énoncés d'exercices posés aux concours s'est singulièrement étoffée passant de quelques centaines d'énoncés à près de 1500. Le comité de rédaction de la RMS s'est toujours attaché, en plus de collationner auprès d'élèves et de collègues les énoncés de l'année écoulée, à en vérifier la validité. Il s'agit là d'un outil précieux qui reflète, dans toutes leur diversité et en temps réel, les oraux de nos grandes écoles.

Malheureusement, la pagination de la RMS est limitée et la rédaction ne souhaite pas que les différentes rubriques soient réduites au profit de la liste de ces exercices. Il nous semblait également qu'il était dommage de limiter le public de ces énoncés aux abonnés de notre revue, essentiellement des enseignants et des bibliothèques d'institutions (lycées, universités et grandes écoles) ; nous avons pensé en particulier aux étudiants des classes préparatoires qui souhaitent disposer, sous une forme facilement utilisable, d'un échantillon représentatif de ce qui a été posé l'année précédente dans les différentes épreuves orales. L'idée nous est donc venue tout naturellement de publier l'ensemble des énoncés que nous avions réunis et vérifiés, dans un ouvrage à part.

Vous avez donc entre les mains le résultat de ce travail considérable de collecte et de vérification, à l'état brut. Il permettra

- aux enseignants et aux étudiants d'avoir un aperçu significatif de l'état actuel des oraux de concours,
- aux enseignants de choisir lors des séances de préparation aux oraux les énoncés qui leur sembleront les plus formateurs
- aux étudiants d'exercer leur sagacité et leurs capacités de raisonnement sur des exercices actuels.

Vous trouverez ci-après des énoncés provenant des Écoles Normales Supérieures, de l'École Polytechnique, du concours commun Mines-Ponts, du concours à épreuves communes Centrale-Supélec, du concours commun Mines-Télécom, de l'ENSAM et du Concours Communs Polytechniques, triés par filière (MP, PC et PSI) et par matière (Algèbre, Analyse, Géométrie, Probabilités, Informatique). Le lecteur attentif pourra aussi constater qu'à l'intérieur de chacune de ces sections les exercices sont triés par sujet principal : par exemple en algèbre, on trouvera en premier les exercices d'algèbre générale et d'arithmétique, puis les exercices d'algèbre linéaire, et enfin les exercices d'algèbre bilinéaire et quadratique.

Un petit conseil aux étudiants : ne vous limitez pas aux exercices posés dans les concours qui sont l'objet de votre intérêt principal ou dans les filières dans lesquels vous allez concourir.

L'expérience montre qu'il existe une grande porosité entre les oraux des différentes écoles et des différentes filières, et qu'un énoncé posé au concours Mines-Ponts dans la filière PC l'année N peut être posé à l'École Polytechnique dans la filière MP l'année $N+1$. Vous disposez là d'un instrument de travail remarquable, sachez en profiter.

Nous vous rappelons que près de cent exercices marqués d'une étoile seront corrigés dans le numéro 3 de la 129ème année de la RMS qui paraîtra dans les premiers jours de mai 2019 (un numéro à ne pas manquer) et que de nombreux autres, souvent les plus difficiles, l'ont été dans les précédentes éditions de la revue.

Cet ouvrage et notre revue ne pourraient exister sans tous les collègues enseignant en classes préparatoires qui nous font parvenir les énoncés qu'ils ont pu collecter auprès de leurs étudiants. Le comité de rédaction remercie donc tout particulièrement Jean-Pierre Barani, Marc Becker, Anne-Laure Biolley, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Denis Choimet, Michel Colin, Christian Devanz, Jean-Denis Eiden, Serge Francinou, Philippe Gallic, Stéphane Gonnord, Jean-Claude Jacquens, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Antoine Landart, Catherine Long, François Moulin, Renaud Palisse, Philippe Patte, Alain Pommellet, Marc Rezzouk, Pierre-Alain Sallard, Clément de Seguins-Pazzis, Cécile Stérin, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Le travail gigantesque de collationnement, de tri et de mise en forme de ces énoncés doit tout à Emmanuelle Tosel (avec le soutien de son mari Nicolas). Notre reconnaissance à son égard est immense.

Denis Monasse, rédacteur en chef de la RMS.

Écoles Normales Supérieures – MP

1. Algèbre

1. [PLSR] Dénombrer les listes $(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ où ne figurent pas deux 1 consécutifs.

2. $\star$ [PLSR] Une barrière circulaire est constituée de 17 poteaux dont 5 sont pourris. Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.

3. [L] Soient G un graphe orienté, A et B deux ensembles de sommets de G. Montrer que le nombre maximal de chemins disjoints de A à B est égal au nombre minimal de sommets qu'il faut retirer du graphe pour qu'il n'existe plus de chemin de A à B.

4. $\star$ [P] Soit $(C_k)_{k\geqslant 1}$ une suite sommable de $\mathbb{R}^+$ de somme inférieure ou égale à 1. Montrer que l'on peut ranger des carrés d'aire les C_k dans un carré 10×10.

5. [L] Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Existe-t-il trois entiers strictement positifs consécutifs dont le produit est la puissance k-ième d'un entier ?

6. [P] Dans $\mathbb{Z}^2$, on colorie (m,n) en noir si et seulement si $m \wedge n \neq 1$.

a) Existe-t-il des carrés noirs arbitrairement grands ?

b) Quels sont les motifs $k \times k$ que l'on obtient dans ce coloriage ?

7. [PLSR] La suite croissante des nombres premiers satisfait-elle à une relation de récurrence linéaire à coefficients rationnels ?

8. [SR] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe. Donner une relation entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.

9. $\star$ [P] Une partition multiplicative d'un entier $n > 1$ est la donnée d'une famille $1 < d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_r$ d'entiers tels que $n = \prod_{i=1}^{r} d_i$. On note $f(n)$ le nombre de partitions multiplicatives de n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $f(n) \leqslant n^{1+\varepsilon}$ pour n assez grand.

10. [L] Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} k^{i \wedge n} \equiv 0[n].$$

11. ★ [L] Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Quand n n'est pas un multiple de p, on note n^* un entier tel que $nn^* \equiv 1[p^2]$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^* \equiv 0\ [p^2].$$

12. ★ [L] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z},\ (an+b) \wedge (cn+d) = 1\}$ soit infini.

13. ★ [L] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le cardinal de l'ensemble des $d \in \mathbb{N}^*$ tels que d divise n et $\sqrt{n/2} \leqslant d < \sqrt{2n}$.

a) La suite (a_n) est-elle convergente ?

b) La suite (a_n) est-elle bornée ?

14. [SR] On donne un entier $n \geqslant 2$ et, dans le groupe $\mathcal{S}_n$, on considère l'application qui à σ associe $\sigma c \sigma^{-1}$, où c désigne le cycle $(1, 2, \ldots, n)$. Déterminer l'image de cette application.

15. [PLSR] ***a)*** Donner le nombre minimal de permutations nécessaires pour engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$.

b) Donner le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$.

c) On suppose que pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_n$ et tout n-cycle c de $\mathcal{S}_n$, les permutations τ et c engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que n est premier.

d) Réciproquement, montrer que si n est premier alors pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_n$ et tout n-cycle c de $\mathcal{S}_n$, les permutations τ et c engendrent $\mathcal{S}_n$.

16. [PLSR] Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative $*$. Montrer que $(G, *)$ possède un élément idempotent.

17. [PLSR] Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ n'est pas dénombrable.

18. [PLSR] ***a)*** Soient G un groupe fini, p un nombre premier, H un sous-groupe de G. Soit $a \in G \setminus H$ tel que $a^p \in H$. Montrer que aH possède un élément d'ordre une puissance de p.

b) Trouver un contre-exemple qui montre que le résultat « aH possède un élément d'ordre p » est faux.

19. [PLSR] Soient G un groupe fini et H un sous-groupe strict de G.

a) Montrer que

$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G.$$

b) On suppose que, pour tout $g \in G \setminus H$, $H \cap gHg^{-1} = \{e\}$. Que dire du cardinal de

$$K = \left[G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right] \cup \{e\} \,?$$

20. [PLSR] Soit p un nombre premier. On dit que G est un p-groupe si l'ordre de tout élément de G est une puissance de p.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un groupe G est k-divisible si $\forall x \in G, \exists y \in G, x = y^k$, et qu'il est divisible s'il est k-divisible pour tout k.
a) Montrer qu'un p-groupe p-divisible non trivial est infini.

b) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{U}_{p^n}$ est un p-groupe p-divisible abélien infini. On l'appellera dans la suite $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$.

c) Montrer que $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ est divisible.

d) Montrer que tout sous-groupe H propre de $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ est cyclique.

e) Soit G un p-groupe p-divisible. Montrer que G contient une copie de $\mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$.

21. ★ [L] Soit A un anneau commutatif fini possédant $n \geqslant 2$ diviseurs de 0 (0 est un diviseur de 0). Que peut-on dire du cardinal de A ?

22. [L] Soit G un groupe abélien fini. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G vers $\mathbb{C}^*$. Pour f, g deux fonctions de G vers $\mathbb{C}$, on note

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x).$$

a) Montrer que $\forall (f, g) \in \widehat{G}^2,\ \langle f, g \rangle = \delta_{f,g}$.

b) Montrer que $f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$.

c) Étant donné un sous-groupe H de G, montrer que l'application

$$\begin{cases} \widehat{G} & \longrightarrow \widehat{H} \\ \chi & \longmapsto \chi_{|H} \end{cases}$$

est surjective.

d) Montrer que $|\widehat{G}| = |G|$.

23. [L] Déterminer l'ensemble des nombres rationnels q tels que $\cos(2\pi q)$ soit rationnel.

24. [L] Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots a_{n-1} X^{n-1} + X^n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{C}[X]$. On suppose $|a_0| \geqslant 1$. On pose $M = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \max\{1, |\alpha_k|\}$. Montrer que

$$M^2 + \frac{1}{M^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2.$$

25. [P] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On dit que $z \in \mathbb{C}$ est une valeur critique de P s'il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $z = P(x)$ et $P'(x) = 0$. Soient a et b dans $\mathbb{C}$.

a) On suppose que $[a, b]$ ne contient aucune valeur critique de P. Que peut-on dire de $P^{-1}([a, b])$?

b) On suppose que a et b sont les seules valeurs critiques de P sur $[a, b]$. Que peut-on dire de $P^{-1}([a, b])$?

26. [L] Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\ell(\sigma)$ le nombre de cycles à supports disjoints de σ. Factoriser le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\ell(\sigma)}$.

27. [P] Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 + 9$ dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ lorsque p est un nombre premier.

28. [L] Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique $P_N \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_N(X + X^{-1}) = X^N + X^{-N}$.

b) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_N}$.

29. [PLSR] Montrer que la famille des applications $x \mapsto |x - a|$ $(a \in \mathbb{R})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

30. [PLSR] Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction φ_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $e^{-1/(x-a)^2}$ si $x \neq a$, et 0 sinon. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

31. $\bigstar$ Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 = \cos$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f_n \circ \cos$. Montrer que la famille $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est libre.

32. $\bigstar$ [P] Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}(AB) + \operatorname{rg}(BC) \leqslant \operatorname{rg} B + \operatorname{rg}(ABC)$.

33. [P] Donner le cardinal maximal des familles libres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formées de matrices commutant deux à deux.
Ind. Dans un premier temps, montrer une minoration de l'ordre de $n^2/4$.

34. $\bigstar$ [P] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout i, $a_{i,i} = 1$ et que, pour tous $i \neq j$, $|a_{i,j}| \leqslant 1/\sqrt{n}$. Montrer que le rang de A est supérieur ou égal à $n/4$.

35. $\bigstar$ [P] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $p \leqslant n$, on ordonne arbitrairement l'ensemble I_p des parties à p éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et on note B_p la matrice carrée de taille $\binom{n}{p}$ dont les coefficients sont les mineurs $\det[A]_{I,J}$, $I, J \in I_p$, où les indices sont rangés par ordre croissant. Montrer qu'il existe un unique p tel que B_p soit de rang 1.
Application : montrer que si A est antisymétrique alors elle est de rang pair.

36. [L] Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $f(1) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une unique $f^* : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\sum_{k|m} f(k)f^*(m/k) = \delta_{m,1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

b) On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $a_{i,j} = f(i/j)$ si $j|i$, $a_{1,j} = 1$ pour tout $j > 1$, et $a_{i,j} = 0$ dans toute autre situation. Montrer que

$$\det A = f(1)^n \Big(1 + \sum_{k=2}^{n} f^*(k)\Big).$$

c) Expliciter f^* lorsque f est constante de valeur 1.

37. [P] Soient X un ensemble, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, et E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions.

a) Étudier les rapports entre les propriétés suivantes :

i) E est de dimension n ;

ii) il existe $x_1, \dots, x_n$ dans X tels que, pour tous $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathbb{R}$, il existe $f \in E$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i$;

iii) pour tous $x_1, \dots, x_n$ distincts dans X, pour tous $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathbb{R}$, il existe $f \in E$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i$;

iv) il existe $x_1, \dots, x_n$ dans X tels que $\det\left(f_i(x_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$;

v) la seule fonction de E qui s'annule n fois est la fonction nulle.

On dit que $(f_1, \dots, f_n)$ est n-interpolante sur X si et seulement si, pour tous $x_1, \dots, x_n$ distincts dans X, pour tous $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathbb{R}$, il existe $f \in E$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i.$$

b) Donner des exemples de familles de fonctions continues n-interpolantes sur $\mathbb{R}$.

c) Existe-t-il des familles de fonctions continues (resp. non continues) n-interpolantes sur $\mathbb{R}^2$? sur la partie de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,0),\ x \in \mathbb{R}^-\} \cup \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}^+\}?$$

38. ★ [P] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

a) Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

b) Existe-t-il toujours p premier tel que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$?

39. [L] Déterminer les morphismes du groupe multiplicatif $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe additif $\mathbb{Z}$; on pourra pour ce faire considérer les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

40. ★ [PLSR] Soient A et B dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$ et $\mathrm{tr}\, A \neq 0$. Montrer que A et B sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A^2 et B^2 sont conjugués dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. *Rappel.* Si $(G, \cdot)$ est un groupe, on dit que g et g' sont conjugués dans G s'il existe $a \in G$ tel que $g = a g' a^{-1}$.

41. [PLSR] Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On dit que A et B sont G conjuguées s'il existe $P \in G$ telle que $A = PBP^{-1}$. Comparer les quatre propriétés suivantes :

(i) A et B sont $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ conjuguées,
(ii) A et B sont $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ conjuguées,
(iii) A et B sont $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ conjuguées,
(iv) A et B sont $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ conjuguées.

42. ★ [PLSR] Déterminer les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.

43. [P] Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ commute avec une infinité de matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

44. ★ [P] Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sont équivalents s'il existe une isométrie φ telle que que $u = \varphi \circ v$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|u(x)\| = \|v(x)\|$. Les endomorphismes u et v sont-ils équivalents ?

45. [PLSR] Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou non.

a) Montrer que l'ensemble V des endomorphismes de rang fini est un sous-espace vectoriel absorbant à gauche et à droite de $\mathcal{L}(E)$.

b) Si $u \in V$, on définit $\tau(u)$ comme la trace de l'induit de u sur son image ; montrer que τ est linéaire et que $\tau(v \circ u) = \tau(u \circ v)$ si $u \in V$ et $v \in \mathcal{L}(E)$.

46. [SR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{MX,\ X \in \mathbb{Z}^n\}$.

a) Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$.

b) On choisit une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $(r, R) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < r < R$ tel que toute boule de rayon r contienne au plus un élément de E et toute boule de rayon R contienne au moins un élément de E.

c) Soient $a, b, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose $F = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |ax + by| < \delta\}$. Montrer l'existence de $L > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur L rencontre F.

47. ★ [PLSR] ***a)*** Soient $n \geqslant 2$, $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que P induit une bijection de $\mathcal{N}_n$ sur lui-même.

b) Montrer que $R(X) = X^3 + X$ induit une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

48. ★ [L] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est échangeur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $F \oplus G = E$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Soit u un automorphisme de E. Montrer que u est échangeur si et seulement s'il existe $v, w \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = v + w$, $v^2 = 0$ et $w^2 = 0$.

49. ★ [PLSR] On admet qu'il existe une $\mathbb{R}$-algèbre H ayant une base $(1_H, i, j, k)$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et dans laquelle $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. On admet en outre que toute $\mathbb{R}$-algèbre commutative intègre de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. Montrer que toute $\mathbb{R}$-algèbre intègre non commutative de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à H.

50. [PLSR] ***a)*** Trouver, à isomorphisme près, les $\mathbb{R}$-algèbres de dimension 2.

b) Si A est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension n, peut-on trouver un morphisme injectif de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

51. [PLSR] Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre dans laquelle les seuls idéaux bilatères sont $\{0\}$ et A. Soit J un idéal à gauche de A, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par $x \mapsto ax$ pour tout $a \in A$. On suppose $J \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de l'algèbre A vers l'algèbre $\mathcal{L}(J)$.

52. ★ [SR] Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i,
$$a_{i,i} \geqslant - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{i,j} \text{ et } \forall i \neq j,\ a_{i,j} \leqslant 0.$$
Montrer que $\operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A = \mathbb{R}^n$.

53. ★ [P] Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ surjective telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $t \in \mathbb{C}$ on ait $\det(A + t\,B) = \det(f(A) + t\,f(B))$. Montrer que f est bijective et préserve le rang.

54. [PLSR] Déterminer les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est finie.

55. ★ [SR] On considère les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont diagonalisables, et préciser leurs valeurs propres.

b) On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geqslant |y|\}$. Montrer que $M_1C \subset C$, $M_2C \subset C$ et $M_1C \cap M_2C = \{0\}$.

c) Pour $\omega \in \{1,2\}^n$, on pose $\psi(\omega) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} M_{\omega_k}$. Montrer que $\psi : \{1,2\}^n \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est injective.

d) Montrer que $\psi(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\omega \in \{1,2\}^n$.

56. [P] Déterminer les matrices de permutation qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

57. [P] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A et de B sont toutes dans $\mathbb{R}^{+*}$. La matrice $A + B$ peut-elle avoir une valeur propre dans $\mathbb{R}^{-*}$?

58. [P] Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AM = MB$. Montrer que $\deg(\chi_A \wedge \chi_B) \geqslant 1$. Établir la réciproque.

59. [SR] Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que, simultanément :

i) il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$;
ii) il existe $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ et $A \equiv I_n\ [m]$.

60. $\star$ [PLSR] ***a)*** Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G^k est semblable à G pour tout entier $k \geqslant 1$. Montrer que $G - I_n$ est nilpotente.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On pose $M = I_n + A$. Montrer que M^k est semblable à M pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

61. [P] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Q le pgcd des mineurs de taille $(n-1)$ de la matrice $XI_n - A$.

a) Montrer que Q divise χ_A.

b) Montrer que le polynôme minimal de A est égal à χ_A/Q.

62. [L] Considérons $a : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (Y \mapsto [X,Y]) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et
$b : X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto (Y \mapsto XYX^{-1}) \in \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.
Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(a(X)) = b(\exp(X))$.

63. [SR] ***a)*** Soit $(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in E^{n+1}$, où E est un espace euclidien de dimension n. On suppose que $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

b) Montrer l'existence, dans tout espace euclidien de dimension n, d'un $(n+1)$-uplet vérifiant les hypothèses de la question précédente.

64. [L] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit du produit scalaire défini par
$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta)\, g(\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Π_n la projection orthogonale sur le sous-espace F_n de E formé des fonctions polynomiales de degré au plus n. On fixe $f \in E$ polynomiale. Étudier le comportement asymptotique, lorsque n tend vers $+\infty$, de la trace de l'endomorphisme $g \mapsto \Pi_n(fg)$ de F_n.

65. [SR] Soit A une matrice antisymétrique réelle. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

66. [PLSR] ***a)*** Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

b) Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de déterminant 1.

67. [L] Déterminer les sous-groupes finis de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ à isomorphisme près.

68. [PLSR] On dit que $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est *circulaire* s'il existe $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telles que $M = PQP^{-1}$.

a) Caractériser, en utilisant en particulier la trace, les matrices circulaires.

b) Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est produit de deux matrices circulaires.

69. [PLSR] Soit E un espace euclidien de dimension 3 ; on *admet* que tout demi-tour (c'est-à-dire toute rotation d'angle π) se met sous la forme $uvu^{-1}v^{-1}$ dans le groupe $G = \mathrm{SO}(E)$. Montrer alors que tout élément de G est aussi de cette forme. Montrer enfin le résultat admis.

70. [P] Soient X un ensemble quelconque et $K : X \times X \to \mathbb{R}$ symétrique. On dit que K est un noyau lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n,\ (K(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est positive.

a) On suppose que K est un noyau et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n,\ \mathrm{rg}(K(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \leqslant k.$$
Montrer qu'il existe $\varphi : X \to \mathbb{R}^k$ telle que : $\forall (x, y) \in X^2,\ K(x, y) = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$

b) Montrer que si K, K' sont deux noyaux alors $K \times K'$ est encore un noyau.

c) En déduire que $K : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp(xy)$ est un noyau.

71. ★ [L] ***a)*** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$.
On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

72. [PLSR] Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leqslant a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

73. [SR] Soient $V : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f : \gamma \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} V(\gamma k)$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer qu'il existe γ_0 et γ_1 tels que $f(\gamma_0) = 1/2$ et $f(\gamma_1) = 1/4$.
Soit $M(d) = (V(|i-j|d))_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
c) Si $d > \gamma_0$, montrer que $M(d)$ appartient à $\mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$.
On suppose $d > \gamma_0$. Soit ${}^t(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $MX = {}^t(1, \dots, 1)$.

d) Majorer $\max\{|x_0|, \dots, |x_n|\}$ à l'aide de f.

e) On suppose $d > \gamma_1$. Minorer $\min\{|x_0|, \dots, |x_n|\}$

74. [P] Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$. Pour $r \in \{1, \dots, n\}$, on note E_r l'ensemble des matrices de rang r de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : M \mapsto \|A - M\|$. Montrer qu'il existe une matrice A_r minimisant Φ sur E_r.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe O, O' dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale telles que $A = O\Delta O'$.

75. [P] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une forme bilinéaire $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est dite non dégénérée si, pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $B(x, y) \neq 0$.
Deux formes bilinéaires $B, C : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sont dites isométriques s'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $B(x, y) = C(\varphi(x), \varphi(y))$.

a) Soit $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une forme bilinéaire non dégénérée. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B(y, x) = B(x, \beta(y))$. On dit que β est l'asymétrie de B.

c) Soient $B, C : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ deux formes bilinéaires non dégénérées d'asymétries respectives β et γ. On suppose β diagonalisable. Montrer que B et C sont isométriques si et seulement β et γ sont semblables c'est-à-dire s'il existe $\psi \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ tel que $\gamma = \psi \circ \beta \circ \psi^{-1}$.

2. Analyse

76. [L] Caractériser les parties A de $\mathbb{R}$ telles que toute partie non vide de A possède un plus petit élément.

77. [P] Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on note

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|,\ N_2(P) = \int_0^{1/2} |P(t)|\ \mathrm{d}t \text{ et } N_3(P) = \int_0^2 |P(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Comparer ces normes sur $\mathbb{R}[X]$.

78. ★ [PLSR] Trouver un espace vectoriel E, deux normes N_1 et N_2 sur E et une suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers ℓ_1 pour N_1, ℓ_2 pour N_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

79. [L] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.
a) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de boules ouvertes disjointes de E. Montrer que I est dénombrable.

b) Si $B = B(\omega, R)$ est une boule ouverte de E, on note $5B = B(\omega, 5R)$. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de boules ouvertes de E. Établir l'existence d'une sous-famille $(B_i)_{i\in J}$ telle que les B_i, pour $i \in J$, sont disjointes et

$$\bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup_{j\in J} 5B_j.$$

80. ★ [PLSR] ***a)*** Soit X un ensemble fini. Déterminer les normes N sur $\mathbb{R}^X$ telles que : $\forall f \in \mathbb{R}^X$, $N(f^2) = N(f)^2$.

b) Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $N(fg) = N(f)\,N(g)$?